7 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

7.1. Существуют ли такие числа a и b, для которых все четыре числа $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $a:b$ разные и каждое из этих чисел равно какому-то из чисел 0,9 , 3,6 , 1,6 , 3,9

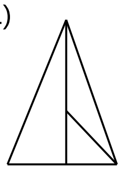
Ответ: да, $a = 2{,}4$ и $b = 1{,}5$.

Комментарии. Подходящая пара – единственная. Если она указана верно – 7 баллов.

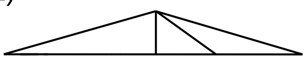
7.2. Докажите, что любой равнобедренный треугольник можно разбить (без остатка) на два прямоугольных треугольника и один равнобедренный треугольник.

Решение. Возможны три случая: 1) исходный треугольник – остроугольный, 2) исходный треугольник – тупоугольный, 3) исходный треугольник – прямоугольный.

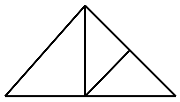
1)



2)



3)



Комментарии. Верный пример разбиения только для случая 1) или только для случая 2) – 4 балла.

Верный пример разбиения только для двух случаев – 6 баллов.

7.3. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c, x, y всегда хотя бы одно из чисел x/(ab+ac) и y/(ac+bc) будет меньше, чем (x+y)/(ab+bc) .

Решение. Если $x/(ab+ac) \le y/(ac+bc)$, то $x/(ab+ac) \le (x+y)/(ab+bc+2ac) < (x+y)/(ab+bc)$. Если же $y/(ac+bc) \le x/(ab+ac)$, то $y/(ac+bc) \le (x+y)/(ab+bc+2ac) < (x+y)/(ab+bc)$.

Дополнительный критерий.

Утверждение было доказано для ряда случаев соотношений между a, b, c, оценка – 3 балла.

Рассмотрены только частные случаи значений a, b, c, x, y, то оценка – 0 баллов.

7.4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых числа $2n-3$ и $3n-2$ имеют не равный 1 общий делитель.

Решение. Достаточно заметить, что при любом целом положительном k при $n = 5k-1$ числа $2n-3 = 10k-5$ и $3n-2 = 15k-5$ делятся на 5.

Дополнительный критерий.

Указана бесконечная последовательность с нужным свойством, но не доказано, что она им обладает (к примеру, написано, что подходят числа, заканчивающиеся на 4 или 9, общий делитель будет равен 5, но это утверждение не обосновано) – 2 балла.

Доказано, что общий делитель равен 5, но не приведен пример искомой последовательности – 3 балла.

7.5. Докажите, что из любого множества из 15 положительных целых чисел, каждое из которых не превосходит 2020, всегда можно выбрать два непересекающихся подмножества с одинаковыми суммами входящих в эти подмножества чисел.

Решение. Сумма 15 чисел не больше, чем $15 \cdot 2020 = 30300$. Из 15 чисел можно получить 2^{15} различных наборов. Так как $2^{15} = 32768 > 30300$, то какие-то две суммы будут одинаковыми. Если в этих двух наборах (подмножествах) есть одинаковые элементы, то вычтем их в каждом наборе. При этом в каждом наборе останется хотя бы одно число, а суммы в наборах уменьшаться на одну величину и, следовательно, останутся равными.

Комментарии. Доказано, что какие-то две суммы будут равными, но с этих суммах не убраны равные слагаемые – 6 баллов.

8 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

8.1. Найдите все такие целые числа z, для которых из пяти утверждений

1) $2z > 130$, 2) $z < 200$, 3) $3z > 50$, 4) $z > 205$, 5) $z > 15$

два истинные, а три – ложные.

Ответ: 16.

Решение. Если $z > 205$, то ложно только утверждение 2 . Если $200 \le z \le 205$, то ложными будут только утверждения 2 и 4 . При $66 \le z \le 199$ ложным будет только утверждение 4 . При $17 \le z \le 65$ ложными будут только утверждения 1 и 4 . При $z = 16$ ложными будут только утверждения 1, 3 и 4 . При $z \le 15$ ложными будут все утверждения, кроме 2.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Показано, что $z = 16$ подходит – 1 балл.

8.2. В треугольнике ABC угол ABC равен 120 градусов, а на стороне AC отмечены точки K и M так, что AK = AB и CM = CB. Из точки K проведен перпендикуляр KH к прямой BM. Найдите отношение BK : KH .

Ответ: 2 : 1.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

Решение. Так как AK = AB и CM = CB, то угол KBM = угол KBA + угол MBC – угол ABC = (180^0– угол CAB)/2 + (180^0 – угол ACB)/2 – 120^0 = 30^0. Так как в прямоугольном треугольнике BHK угол при вершине B равен 30^0, то BK : KH = 2 : 1.

8.3. Тоша едет из пункта A в пункт B через пункт C . От A до C Тоша едет со средней скоростью 75 км/ч, а от C до B Тоша едет со средней скоростью 145 км/ч. При этом на весь путь от A до B у Тоши ушло 4 часа 48 минут. На следующий день Тоша едет обратно со средней скоростью 100 км/ч. При этом на путь от B до C у Тоши ушло 2 часа, а путь из C в A Тоша проехал со средней скоростью 70 км/ч. Найдите расстояние между B и C.

Ответ: 290 км.

Решение. Обозначим за x км расстояние между B и C , а за y км – расстояние между A и C . Из системы уравнений $x/145 + y/75 = 24/5$ и $(x + y)/100 = 2 + y/70$ находим: $x = 290$ и $y = 210$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Система уравнений составлена верно, но при её решении допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

8.4. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых числа $2n-3$ и $3n-2$ имеют не равный 1 общий делитель.

Решение. Достаточно заметить, что при любом целом положительном k при $n = 5k-1$ числа $2n-3 = 10k-5$ и $3n-2 = 15k-5$ делятся на 5.

8.5. Из пяти элементов составлены четырнадцать множеств, причём выполнены три условия:

1) в каждом множестве есть хотя бы один элемент;
2) у каждых двух множеств есть хотя бы один общий элемент;
3) никакие два множества не совпадают.

Докажите, что из исходных пяти элементов можно составить ещё одно (пятнадцатое) множество, которое вместе с исходными четырнадцатью множествами также удовлетворяет указанным выше трём условиям.

Решение. Если среди 14 указанных множеств есть состоящее из одного элемента, то все остальные множества включают этот элемент. Всего есть $2^4 = 16$ множеств (включая пустое) без этого элемента. Добавляя к ним этот элемент, получим 16 подходящих множеств. Если среди 14 множеств нет одноэлементных, то предположим теперь, что там есть хотя бы одно множество из двух элементов. Если множество из двух элементов ровно одно, то исключая 5 одноэлементых множеств и 9 множеств из двух элементов, а также множество из трех элементов, не пересекающееся по входящим в набор множеством из двух элементов. Останется еще 15 подходящих множеств (например, 12, 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 1234, 1235, 1245, 1345, 2345, 12345). Если множеств из двух элементов два (например, 12 и 13), то можно добавить 8 множеств из трёх элементов (исключая множества 345 и 245), 5 множеств из четырех элементов и одно множество из всех пяти элементов. Всего 16 множеств. Для трех множеств из двух элементов (например, 12, 13, 23) можно добавить 7 множеств из трех элементов, 5 множеств из четырех элементов и одно множество из 5 элементов. Опять есть 16 множеств. Для четырех множеств из двух элементов (например, 12, 13, 14, 15) можно добавить 6 множеств из трех элементов, 5 множеств из четырех элементов и одно множество из 5 элементов. Последний возможный случай: все множества содержит больше двух элементов. Тогда они все подойдут. А таких множеств тоже 16. Так что можно всегда найти 16 множеств.

Комментарии. Верно рассмотрен случай, когда среди 14 указанных множеств есть состоящее из одного элемента – 1 балл.

9 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

9.1. Найдутся ли двенадцать различных целых чисел, среди которых ровно шесть простых чисел, ровно девять нечётных чисел, ровно десять неотрицательных чисел и ровно семь чисел больших десяти?

Решение. Да, например: -8, -4, 2, 5, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 37, 81 .

Комментарии. Приведён любой правильный пример – 7 баллов.

9.2. Тоша едет из пункта A в пункт B через пункт C . От A до C Тоша едет со средней скоростью 75 км/ч, а от C до B Тоша едет со средней скоростью 145 км/ч. При этом на весь путь от A до B у Тоши ушло 4 часа 48 минут. На следующий день Тоша едет обратно со средней скоростью 100 км/ч. При этом на путь от B до C у Тоши ушло 2 часа, а путь из C в A Тоша проехал со средней скоростью 70 км/ч. Найдите расстояние между B и C.

Ответ: 290 км.

Решение. Обозначим за x км расстояние между B и C , а за y км – расстояние между A и C . Из системы уравнений $x/145 + y/75 = 24/5$ и $(x + y)/100 = 2 + y/70$ находим: $x = 290$ и $y = 210$.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Система уравнений составлена верно, но при её решении допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

Дополнительный критерий. Если только составлены уравнения и не было никаких решений системы, то оценка – 3 балла.

9.3. Докажите, что для любых положительных чисел a и b с $ab = 1$ справедливо неравенство $a^3 + b^3 + 1 \ge 2a + b^2$.

Доказательство. $a^3 + 1/a^3 + 1 \ge 2a + 1/a^2$, $a^6 - 2a^4 + a^3 - a + 1 \ge 0$, $(a - 1)(a^5 + a^4 - a^3 - 1) \ge 0$, $(a - 1)^2 (a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1) \ge 0$ – верно.

Специальных критериев нет. Некоторые продвижения в решении оценивались в 1 или 2 балла.

9.4. Внутри угла AOB отмечена точка C так, что $\angle OCA = \angle OCB = 90^0 - \angle AOB$. Точки P и T симметричны точке C относительно прямых OA и OB соответственно. Докажите, что точки P, T, A и B лежат на одной прямой.

1-е решение. Так как треугольники OAC и OAP симметричны и треугольники OBC и OBT симметричны, то $OC = OP = OT$, $\angle OPA = \angle OCA = \angle OCB = \angle OTB$ и $\angle POT = 2\angle AOB$. Так как сумма углов при основании равнобедренного треугольника OPT равна $180^0 - 2\angle AOB$, то $\angle OPT = \angle OTP = 90^0 - \angle AOB$. Так как $\angle OPA = \angle OPT$ и $\angle OTB = \angle OTP$, то точки A и B лежат на прямой PT.

2-е решение. Пусть A_1 и B_1 - точки пересечения PT с OA и OB соответственно. Достаточно проверить, что $\angle OCA_1 = \angle OCB_1 = 90^0 - \angle AOB$. Так как по условию треугольники OA_1C и OA_1P и треугольники OB_1C и OB_1T симметричны, то $OC = OP = OT$, $\angle OCA_1 = \angle OPA_1 = \angle OTB_1 = \angle OCB_1$ и $\angle POT = 2\angle AOB$. Так как сумма углов при основании равнобедренного треугольника OPT равна $180^0 - 2\angle AOB$, то $\angle OCA_1 = \angle OPA_1 = 90^0 - \angle AOB$ и $\angle OCB_1 = \angle OTB_1 = 90^0 - \angle AOB$.

Критерий. Если доказано, что $\angle OPA = \angle OCA = \angle OCB = \angle OTB$ и что $OP = OT$ без дальнейшего продвижения, то оценка – 2 балла.

9.5 На доске 20×15 клеток в некоторых клетках помещаются фишки (в каждой клетке не более одной фишки). Две фишки назовем «связными», если они расположены в одном столбце или в одной строке, и между ними нет других фишек. Какое наибольшее количество фишек можно расставить на доске так, чтобы у каждой было не больше двух «связных» для нее фишек?

Ответ: 35.

Решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ количества фишек в строках 1, 2, … , 20, а $y_1, y_2, \ldots, y_{15}$ – количества фишек в столбцах 1, 2, … , 15. Тогда общее количество фишек $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{20} = y_1 + y_2 + \ldots + y_{15}$. Количество «связностей» $k \geq (2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) + \ldots + (2x_{20} - 2) + (2y_1 - 2) + (2y_2 - 2) + \ldots + (2y_{15} - 2) = 4S - 70$. Так как у каждой фишки не более двух связных с ней фишек, то $2S \geqslant k \geqslant 4S - 70$, то есть $S \leqslant 35$. Можно разместить на доске 35 фишек, заполнив нижнюю строчку и левый столбец, и еще одну фишку поместив в правый верхний угол.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Верная обоснованная оценка – 4 балла.
Верный пример – 3 балла.

10 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в *комментариях* к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

10.1. Найдутся ли двенадцать различных целых чисел, среди которых ровно шесть простых чисел, ровно девять нечётных чисел, ровно десять неотрицательных чисел и ровно семь чисел больших десяти?

Решение. Да, например: -8, -4, 2, 5, 9, 11, 13, 15, 21, 23, 37, 81 .

Комментарии. Приведён любой правильный пример – 7 баллов.

10.2. Докажите, что для любых положительных чисел a и b с $ab = 1$ справедливо неравенство $a^3 + b^3 + 1 \geq 2a + b^2$.

Доказательство. $a^3 + 1/a^3 + 1 \geq 2a + 1/a^2$, $a^6 – 2a^4 + a^3 – a + 1 \geq 0$, $(a – 1)(a^5 + a^4 – a^3 – 1) \geq 0$, $(a – 1)^2 (a^4 + 2a^3 + a^2 + a + 1) \geq 0$ – верно.

10.3. Целое число 23713 обладает следующими двумя свойствами:

(1) любые две соседние цифры образуют простое двузначное число,

(2) все эти простые двузначные числа попарно различны.

Найдите наибольшее из всех целых чисел со свойствами (1) и (2).

Ответ: 617371311979.

Решение. Так как четные цифры и цифра 5 могут быть только в старшем разряде (причем только одна из таких цифр для образования одного простого числа), а остальные простые двузначные числа – 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, то максимальное количество цифр в искомом числе равно 12. В искомом числе числа 19, 79, 97 встретятся только, если число из последних четырех цифр имеет вид 1979. С цифрой 7 кроме чисел 97 и 79 еще четыре числа, а это значит, что цифра 7 должна встретиться в искомом числе еще два раза, причем не на втором месте слева. В одном случае соседи цифры 7 – две цифры 1, а во втором – две цифры 3. Есть также четыре числа с цифрой 3. Значит, цифра 3 тоже не может быть на втором месте слева. Следовательно, на этом месте должна быть цифра 1. Тогда максимальное искомое число должно начинаться на 6. Остальные цифры несложно подобрать. Максимальное число 617371311979.

Комментарии. Только верный ответ – 3 балла. Показано, что количество цифр в искомом числе не больше двенадцати – 2 балла.

Замечания по ходу проверки. Приведённое решение содержит неточность, сказавшуюся на ответе. Исправленные ответ и решение имеют вид:

Ответ: 619737131179.

Решение. Так как четные цифры и цифра 5 могут быть только в старшем разряде (причем только одна из таких цифр для образования одного простого числа), а остальные простые двузначные числа – 11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97, то максимальное количество цифр в искомом числе равно 12. В искомом числе числа 19, 79, 97 встретятся только, если число заканчивается на 19 или 79, и цифра 9 не может быть на втором месте слева. С цифрой 7 есть 6 двузначных простых чисел, а это значит, что цифра 7 должна встретиться в искомом числе три раза, причем она не на втором месте слева. Есть также четыре числа с цифрой 3. Значит, цифра 3 тоже не может быть на втором месте слева. Следовательно, на этом месте должна быть цифра 1. Тогда максимальное искомое число должно начинаться на 6. Остальные цифры несложно подобрать. Максимальное число 619737131179.

10.4 Найдите наименьшее целое положительное число k, для которого при любой раскраске чисел множества $M = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ в два цвета найдутся десять не обязательно различных чисел одного цвета из множества M, сумма которых также является числом из множества M и того же цвета, что и слагаемые.

Ответ: 109.

Решение. Пусть $k \geq 100$. Предположим, что для каждых 10 чисел одного цвета их сумма или число другого цвета, или не принадлежит M. Пусть число 1 первого цвета, а число 2 – второго. Тогда числа 10 и 20 – второго и первого цвета соответственно. Далее, число $28 = 10 + 9\cdot 2$ – первого цвета, а $29 = 20 + 9\cdot 1$ – второго цвета, $47 = 29 + 9\cdot 2$ – первого цвета, а $37 = 28 + 9\cdot 1$ – второго цвета. Если 3 – первого цвета, то $20 + 9\cdot 3 = 47$ – второго цвета. Противоречие. Если 3 – второго цвета, то $10 + 9\cdot 3 = 37$ – первого цвета. Противоречие. Пусть числа $1, 2,\ldots,k$ – числа первого цвета ($9 \geq k \geq 2$). Тогда числа $10, 11, \ldots, 10k$ - второго цвета, а числа $100, 101, \ldots 100k$ – первого цвета. Тогда число $100 + 9\cdot 1 = 109$ – должно быть числом второго цвета. Противоречие. Покажем, что есть раскраска чисел, что для $k = 108$ указанных 10 чисел не будет. Раскрасим числа 1,2, …, 9 – в первый цвет, числа 10, 11, …, 99 – во второй цвет, а числа 100, 101, …, 108 – в первый цвет. Сумма любых 10 чисел одного цвета или число другого цвета, или не является числом из множества M.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Приведён верный пример с $k = 109$ – 3 балла.

10.5. Дан треугольник ABC с $AB = 1$ и углом $ABC = 120^0$. На стороне AC отмечена точка T так, что $TC = 1$ и угол $TBA = 90^0$. Найдите AT. Ответ: $\sqrt[3]{2}$.

1-е решение. Обозначим за x искомый отрезок AT, а за $2y$ - отрезок BC. Опустим из точки C перпендикуляр CH на продолжение отрезка AB за точку B. Тогда CM параллельна BT, а угол BCH равен 30^0. Поэтому $BH = y$, $BH : TC = AT : AB$ ($y : 1 = 1 : x$) и, следовательно, $y = 1/x$. Теперь по «теореме косинусов» из треугольника ABC находим:

$$(x + 1)^2 = 1^2 + 4y^2 + 2y, \quad x^2 + 2x = 4y^2 + 2y = 4/x^2 + 2/x, \quad x^2 + 2x = (x^2 + 2x)\cdot\frac{2}{x^3}, \quad \text{откуда} \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

2-е решение. Из точки T проведем перпендикуляр к BT до пересечения с BC в точке K. Пусть $AT = x$, $TK = y$, $KC = z$. В прямоугольном треугольнике TBK угол TBK равен $30°$, поэтому $BK = 2y$. Так как AB и TK параллельны, то треугольники ABC и TKC подобны, значит $\frac{1}{y} = \frac{x+1}{1} = \frac{2y+z}{z}$. Отсюда $z = \frac{2y^2}{1-y}$ и $y = \frac{1}{1+x}$. Из треугольника TBK находим $BT^2 = 3y^2$, а из треугольника ABT $1 + \frac{3}{(1+x)^2} = x^2$. Перепишем уравнение в виде $\frac{(x+1)^3(x-1)-3}{(1+x)^2} = 0$. Знаменатель дроби не равен 0 при положительных x, поэтому уравнение можно записать в виде $(x+2)(x^3 - 2) = 0$. Единственное положительное решение: $x = \sqrt[3]{2}$.

11 класс – 2020

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в <u>*комментариях*</u> к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. Докажите, что найдутся не менее 2020 различных целых положительных чисел n, что число $n+0{,}25$ является квадратом некоторого рационального числа.

<u>Доказательство</u>. Достаточно заметить, что для любого целого положительного числа m число $n = m^2 + m$ будет удовлетворять условию задачи: $n + 0{,}25 = m^2 + m + 0{,}25 = (m + ½)^2$.

<u>Замечания по ходу проверки</u>. В значительном числе работ только замечено, но <u>не доказано</u>, что подходят числа вида $n = m^2 + m$. Такое продвижение оценивалось в 2 балла.

11.2. Докажите, что если сумма попарно различных положительных чисел x, y, z, t равна 1 , то хотя бы одно из чисел $\sqrt{x}+\sqrt{y},\ \sqrt{x}+\sqrt{z},\ \sqrt{x}+\sqrt{t},\ \sqrt{y}+\sqrt{z},\ \sqrt{y}+\sqrt{t},\ \sqrt{z}+\sqrt{t}$ больше 1 .

<u>Доказательство</u>. Не умаляя общности, можно считать, что $x>y>z>t$. Достаточно проверить, что $\sqrt{x}+\sqrt{y}>1$ при выполнении условий $1>x>\frac{1}{4}$ и $x>y>\frac{1-x}{3}>0$. Проверка: $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{x}+\sqrt{\frac{1-x}{3}}>1$

$$\Leftrightarrow\quad x+\frac{1-x}{3}+2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{3}}>1 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1-x}{3}}>\frac{2-2x}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x(1-x)>\frac{(1-x)^2}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1-x}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x>\frac{1}{4}\ .$$

<u>Замечания по ходу проверки</u>.

1) В ряде работ участники олимпиады перепутали «сумму попарно различных положительных чисел» с «попарной суммой различных положительных чисел». Любое такое «решение» оценивалось в 0 баллов.

2) Вместо указанного в приведённом решении можно (и достаточно) было, например, проверить, что если $x>y>z>t$, то $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 > x + y + z + t$.

11.3. Докажите, что дробь $\frac{m(n+1)+1}{m(n+1)-n}$ несократима для всех натуральных значений n и m .

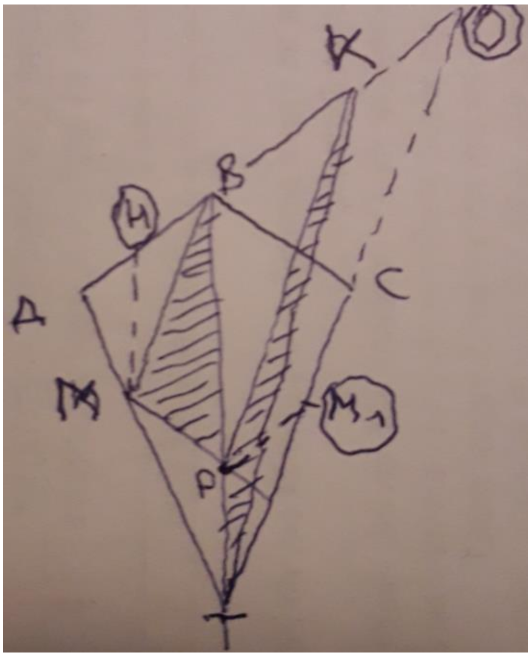
<u>Доказательство</u>. Предположим, что это не так. Тогда разность между числителем и знаменателем, равная $n + 1$, делится на их общий делитель $d > 1$. Тогда $1 = (m\,(n + 1) + 1) – m\,(n + 1)$ делится на d . Противоречие.

<u>Замечания по ходу проверки</u>. Возможно было прямое нахождение наибольшего общего делителя чисел $m\,(n + 1) + 1$ и $m\,(n + 1) – n$ по алгоритму Евклида.

11.4. В выпуклом четырёхугольнике ABCT AB = BC и AT = TC . На диагонали BT отмечена точка P. Прямая, проходящая через P параллельно BC , пересекает прямую AT в точке M . Прямая, проходящая через P параллельно CT , пересекает прямую AB в точке K . Докажите, что треугольники PTK и PBM имеют равные площади.

<u>Доказательство</u>. Пусть O – точка пересечения AB и TC . Отметим на прямой TC такую точку M_1 , что PM_1 параллельно KO . Отметим на AB такую точку H , что HM параллельно BT . Так как треугольники ABT и CBT симметричны, то MHBP – равнобедренная трапеция, $PKOM_1$ – параллелограмм, а точки M_1 и M симметричны относительно BT . Поэтому BH = PM = PM_1 = KO и $S_{PTK} : S_{PBM}$ = (PT : PB) · (KB : HB) = (PT : PB) · (KB : KO) = 1 .

<u>Замечания по ходу проверки</u>. Геометрическая задача, в решении которой достаточно использования свойств симметрии и подобия, оказалась слишком сложной. Проблема была даже с построением рисунка:



11.5 Числа 1, 2, 3, … , 46 разбиты на три группы. Докажите, что хотя бы в одной из групп найдутся два числа, разность которых равна квадрату некоторого целого числа.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что в каждой группе разность любых двух чисел не равна точному квадрату, т.е. не равна числам 1, 4, 9, 16, 25, 36. Рассмотрим набор чисел 1, 10, 26, 17, 35, 19. При данном предположении эти числа единственным образом разделяются на три группы {1, 35}, {10, 17}, {19, 26}. Аналогично, получаем другие пары {2, 36}, {11, 18}, {20, 27}, {3, 37}, {12, 19}, {21, 28}, {4, 38}, {13, 20}, {22, 29}, {5, 39}, {14, 21}, {23, 30}, {6, 40}, {15, 22}, {24, 31}, {7, 41}, {16, 23}, {25, 32}, {8, 42}, {17, 24}, {26, 33}, {9, 43}, {18, 25}, {27, 34}, {10, 44}, {28, 35}, {11, 45}, {29, 36}, {12, 46}, {30, 37}. Тогда в одну группу входят числа {1, 35, 28, 21, 14}, в другую – числа {10, 17, 24, 31, 44}, в третью – {19, 26, 33, 12, 46}. Так как число 20 не может быть в одной группе с числами 19 и 21, то оно во второй группе. Но тогда 24 – 20 = 4 – точный квадрат. Противоречие.

<u>Замечания по ходу проверки</u>. Возможны были различные способы рассуждений, приводящих к противоречию. В некоторых работах было показано (или только замечено), что для любой четвёрки чисел n, $n+9$, $n+16$, $n+25$ оба средних числа попадают в группу, в которой нет чисел n и $n+9$. Такое продвижение оценивалось в 3 балла.